Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
Matematikai intézet
Algebra és Számelmélet Tanszék

Doktori értekezés tézisei

Cayley graphs

Somlai Gábor

Matematika Doktori Iskola
Iskolavezető: Laczkovich Miklós
MTA rendes tagja

Elméleti matematika program
Programvezető: Szűcs András
MTA levelező tagja

Témavezető: Pálfy Péter Pál

MTA rendes tagja

2014 May

Bevezetés

Az értekezés két fő részből áll. A két részt a Cayley gráfok fogalma köti össze. Az első részben új módszereket fejlesztünk ki, amik a Cayley gráfok izomorfizmus problémájával kapcsolatosak. A tézis második részében Lubotzky egy egyszerű csoportok Cayley gráfjainak végtelen sorozatairól szóló kérdését válaszoljuk meg.

Legyen G egy csoport, és S egy részhalmaza. Ekkor a $Cay(G,S)$ Cayley gráf csúcsai G elemeinek felelnek meg, és az x csúcsból akkor megy él az y csúcsba, ha van olyan $s \in S$, amire $y = xs$. Könnyű látni, hogy G tetszőleges elemével balról szorzás automorfizmusa a gráfnak, így $Cay(G,S)$ automorfizmuscsoportja tartalmaz G-vel izomorf reguláris részcsoportot. Ez a tulajdonság jellemzi is G csoport Cayley gráfjait.

A Cayley gráfok izomorfizmus problémája Ádám András egy sejtésével [Ádá] kezdődött. Ádám azt sejtette, hogy két ciklikus gráf $\Gamma_n(k_1, k_2, \ldots, k_m)$ és $\Gamma_n(k'_1, k'_2, \ldots, k'_m)$ pontosan akkor izomorf, ha létezik egy $0 < r < n$ egész szám, ami relatív prím n-hez, amire $k'_i \equiv rk_i \ (mod\ n)$ minden $1 \leq i \leq m$-re. Ádám sejtését többen is megcáfolták, mégis vizsgálatok hosszú sorát indította el ez a probléma. Babai következő általános, minden csoportra fennálló észrevétele vezetett el a CI-csoportok fogalmának a kialakulásához. Legyen α egy automorfizmusa a G csoportnak, továbbá S és T két részhalmaza G-nek, amikre $S^\alpha = T$. Ekkor α egy izomorfizmus indukál $Cay(G,S)$ és $Cay(G,T)$ gráfok között. Kérdés, hogy ez az állítás mikor fordítható meg.

Definíció 1. *(a) Egy Cayley gráfot $Cay(G,S)$-t CI-gráfnak hívunk, ha minden T részhalmazára G-nek, a Cayley gráfok $Cay(G,S)$ and $Cay(G,T)$ pontosan akkor izomorfak, ha létezik egy α automorfizmusa G-nek , amire $S^\alpha = T$.*

(b) Egy G csoportot DCI-csoportnak hívunk, ha minden Cayley gráfja CI-gráf. Illetve a G csoport CI-csoport minden irányítatlan Cayley gráfja CI-gráf.

Ez a definíció mutatja, hogy a CI-gráfok egy nagyon speciális osztályát alkotját a Cayley gráfoknak, komoly megszorítással az izomorf tagok közötti izomorfizmusokra nézve.

Fontos tulajdonsága a CI tulajdonságnak, hogy öröklődik részcsoportra. Babai és Frankl [B,F1] látták be a következő tételt, ami komoly megszorítást jelent a CI-csoportok struktúrájára nézve.

Tétel 1 (Babai, Frankl). *A p-Sylow részcsoportja egy véges CI-csoportnak csak a következő csoportok valamelyike lehet:* $\mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_8$, $\mathbb{Z}_9$, $\mathbb{Z}_{27}$ *vagy a 8 elemű kvaterniócsoport.*

Li, Lu and Pálfy [L,L,P] egy listát állított össze 2007-ben, ami az akkor ismert összes CI-csoportot tartalamazta, illetve összeállítottak egy másik listát, amiben a lehetséges CI-csoportokat sorolják fel. Ezek a disszertációban megtalálhatóak. Felhasználva ezeket az eredményeket látható, hogy a következő két kérdés a legfontosabb ebben a témakörben:

Kérdés. *(I) Mely elemi Abel p-csoportok CI-csoportok?*
Ennek a kérdésnek a vizsgálatát Babai és Frankl [B,F1] indította el.

(II) Meghatározni, hogy a direkt szorzata két CI-csoportnak, amiknek rendje relatív prím, rendelkezik-e a CI tulajdonsággal.
Ezt sejtésként végül Kovács és Muzychuk [K,M] fogalmazta meg.

Az értekezés második fejezetében egy új módszert dolgozunk ki, amivel először belátjuk, hogy ha p egy páratlan prím, akkor a $2p+3$ rangú elemi Abel p-csoport nem CI-csoport. A tézis harmadik fejezétben több csoportról, amik direkt szorzatai relatív prím rendű CI-csoportoknak látjuk be, hogy CI-csoportok, ezzel is pozitív választ adva a második kérdésre több speciális esetben.

Egy tetszőleges Γ gráfra az izoperimetrikus szám a következő:

$$h(\Gamma) = min \left\} \frac{|\partial(S)|}{|S|} \right\{ S \subset V(\Gamma),\, 0 < |S| \leq \frac{|V(\Gamma)|}{2} \ .$$

Egy Γ gráfról azt mondjuk, hogy ϵ*-expander* , ha $h(\Gamma) \geq \epsilon$, illetve gráfok egy Γ_n sorozata *expander család*, ha van olyan pozitív ϵ, hogy minden n-re Γ_n egy ϵ-expander. Továbbá azt mondjuk, hogy csoportok egy G_n végtelen sorozata expanderré tehető, ha minden n-re van olyan S_n generátorrendszere G_n-nek, amire a Cayley gráfok végtelen sorozata $Cay(G_n, S_n)$ egy expander család.

Az első bizonyítás expanderek létezésére Pinskertől [Pin] származik, aki valószínűségi érvelést használt, míg az első explicit példa expanderekre Margulistól [Mar] származik. Azt mondhatjuk, hogy expander gráfok ritka, de mégis erős összefüggőségi tulajdonsággal rendelkező gráfok, amiknek így alkalmazásaik vannak mind elméleti mind alkalmazott matematikában.

Lubotzky [Lub2] Lie típusú egyszerű csoportok végtelenhez tartó rangú sorozatainak Cayley gráfjainak vizsgálatát is kezdeményezte. Azt írta, hogy valószínű, hogy ha G_n Lie típusú egyszerű csoportok egy végtelen sorozata, amiknek a rangja tart végtelenbe, akkor van olyan G_n sorozata $T_n \subset G_n$ generátorrendszereknek, amikhez tartozó Cayley gráfok nem alkotnak expander családot. A tézis utolsó fejezetében növő Lie rangú összefüggő Cayley gráfok legfeljebb tizedfokú sorozatát adjuk meg, amiknek az izoperimetrikus száma nullához tart, és így nem alkotnak expander családot.

Ezután pontosabban is bemutatjuk a tézes eredményeit.

Elemi Abel p-csoportok

A tézis második fejezetében az egyik legfontosabb esetével a foglalkozunk a Cayley gráfok izomorfizmus problémájának, amivel az első itt megfogalmazott kérdésre keressük a választ.

Hirasaka és Muzychuk [H,M] belátták, hogy $\mathbb{Z}_p^4$ CI-csoport minden $p > 2$ prímre. Erre az eredményre nem túl rég Morris [Mor3] egy új, elemi bizonyítást adott. Másrészt Muzychuk [Muz3] belátta, hogy a nagyon nagy, legalább $2p-1+\binom{2p-1}{p}$ rangú elemi Abel p-csoportok nem CI-csoportok. Ennek az eredménynek az erősítéseként a Muzychuk által adott felső korlátot Spiga [Spi1] lényegesen, $4p-2$-re redukálta.

Az egyetlen eset, amiben a kérdés, hogy mely elemi Abel p-csoportok CI-csoportok eldöntött, $p = 2$ esete, hisz Conder és Li [C,L] leellenőrizte, hogy $\mathbb{Z}_2^5$ rendelkezik a CI tulajdonsággal, míg Nowitz [Now] nem CI-gráfot konstruált a $\mathbb{Z}_2^6$ csoporthoz.

Tovább javítva a felső korlátokon, amiket Muzychuk és Spiga adtak meg, a következőt két szervesen összekapcsolódó tételt látjuk be.

Tétel 2 ([Som1]). *Minden páratlan prímre, $\mathbb{Z}_p^{2p+3}$ csoportnak van olyan Cayley gráfja, aminek a fokszáma $(2p+3)p^{p+1}$, és ami nem CI-gráf. Ez mutatja, hogy a legalább $2p+3$ rangú elemi Abel p-csoportok nem DCI-csoportok.*

Tétel 3 ([Som1]). *Minden $p > 3$ prímre, a $\mathbb{Z}_p^{2p+3}$ csoportnak van irányítatlan Cayley gráfja, ami nem CI-gráf. Tehát a legalább $2p+3$ rangú elemi Abel p-csoportok nem is CI-csoportok.*

Tétel 2 and 3 bizonyítása során kizárólag elemi eszközöket alkalmazunk, és csak a CI tulajdonság definícióját használjuk. A bizonyítás fő ötlete, hogy először az izomorfizmust adjuk. Egy elemi Abel p-csoportra nézhetünk úgy, hogy az egy vektortér a p elemű test felett. Az izomorfizmust, egy a p elemű test feletti többváltozós polinom segítségével adjuk meg. Ezután a két Cayley gráf generálóhalmaza könnyen adódik a megadott izomorfizmusból. Ezek mindkét gráf esetében affin alterek uniói.

A tézisben többek között azt is bemutatjuk, hogy a kidolgozott módszer segítségével hogyan látható be Muzychuk és Spiga korábbi eredménye. A konstrukció érdeme, hogy sokat egyszerűsít a Muzychuk és Spiga által használt technikán, sőt segítségével láthatóvá válik, hogy a nagy különbség, ami a két korábbi felső korlát között van hogyan magyarázható mégis egyszerű eszközökkel.

Új végtelen sorozata CI-csoportoknak

A tézis harmadik fejezetében, a bevezetésben megfogalmazott második kérdésre adunk pozitív választ több esetben.

Az első eredmény, amit bizonyítunk ebben a fejezetben a következő:

Tétel 4. *Minden $p \geq 3$ prímszámra, $Q \times \mathbb{Z}_p$ egy DCI-csoport.*

Ez egy új végtelen sorozatát adja véges nem kommutatív CI-csoportoknak, amikből csak nagy kevés ismert. Továbbá a tézisben módszeresen végignézzük a $8p$-rendű csoportokat, ami azt mutatja, hogy ez az eredmény lezárja a $8p$ rendű CI-csoportok vizsgálatát. Egy apró módósításával a bizonyításnak, kapjuk a következő eredményt, amit először Dobson á Spiga [D,S2] látott be

Tétel 5 (Dobson, Spiga). *Minden $p \geq 3$ prímszámra a $\mathbb{Z}_2^3 \times \mathbb{Z}_p$ csoport DCI-csoport.*

Különböző módszert használunk a tétel belátására, ha $p > 8$, illetve $p = 5$ vagy 7 esetekben. Mindkét esetben a bizonyítás Babai [Bab1] következő alapvető lemmáját használja.

Lemma 1 (Babai). *$Cay(G,S)$ Cayley gráf pontosan akkor CI-gráf, ha bármely két a G-vel izomorf reguláris részcsoportja a gráf automorfizmus csoportjának, $Aut(Cay(G,S))$-nak konjugált $Aut(Cay(G,S))$-ban is.*

Abban az esetben, amikor $p > 8$, a Tétel 4-et három lépésben látjuk be. Rögzítünk egy Γ Cayley gráfját G-nek, és veszünk két G-vel izomorf reguláris részcsoportot Γ automorfizmuscsoportjában Az első lépésben csak Sylow tételt használunk, hogy megadhassunk egy a G-vel izomorf két reguláris részcsoport hatására invariáns partícióját Γ csúcsainak. Ezután egy ekvivalencia relációt vezetünk be a partíció elemein, és különböző eseteket vizsgálunk aszerint, hogy mekkora az osztályok mérete. További fontos ötlet, hogy a CI tulajdonságnál kicsivel erősebb tulajdonságát használjuk a Q és $\mathbb{Z}_2^3$ csoportoknak, méghozzá azt, hogy DCI$^{(2)}$-csoportok.

A $p = 5$ vagy 7 esetben fontos észrevétel, hogy a gráf automorfizmus csoportja vagy imprimitív, vagy a gráf a teljes vagy az üres gráf. Ennek segítségével használni tudjuk a $p > 8$ esetben kidolgozott eszközöket.

Kovács and Muzychuk [K,M] belátták, hogy $\mathbb{Z}_p^2 \times \mathbb{Z}_q$ CI-csoport minden p és q prímszámra. A $8p$ rendű csoportok esetében kidolgozott módszert arra is lehet használni, hogy ez az eredményt valamilyen módon tovább javítsuk. Az utolsó két lépését az előző bizonyításnak kicserélve, de az elsőt teljesen megtartva kapjuk a következő eredményt.

Tétel 6. *Legyen p egy prím, továbbá q egy p^3-nél nagyobb prím. Ekkor $\mathbb{Z}_p^3 \times \mathbb{Z}_q$ csoport DCI-group.*

Végül egy általános állítást látunk be egy elemi Abel p-csoport és egy nagy prímrendű ciklikus csoport direkt szorzatáról. A tétel csak bizonyos, a Cayley gráfok fokszámára vonatkozó megkötés mellett érvényes.

Tétel 7. *Legyen H egy véges p-csoport, ami $DCI^{(2)}$-csoport és legyen q egy H rendjénél nagyobb prímszám. Ekkor $G = H \times \mathbb{Z}_q$ egy $(q-1)$-DCI-csoport.*

Egyszerű csoportok nem expander Cayley gráfjai

A tézis utolsó fejezetében ismertetett eredmények elsőre talán furcsán hatnak, hiszen az alkalmazások szempontjából az a hasznos, ha expander gráfsorozatokat konstruálunk. Inkább az tűnik nehéz feladatnak, hogy belássuk egy végtelen gráfsorozatról, hogy expander családot alkot, még akkor is, ha az utóbbi években több technika vált ismertté expanderek konstruálására. Ezzel szemben, Breuillard, Green, Guralnick és Tao [B,G,G,T] belátta, hogy rögzített rangú Lie típusú egyszerű csoportok legtöbb Cayley gráfja ϵ-expander valamilyen pozitív ϵ-ra.

Kassabov, Lubotzky and Nikolov [K,L,N] fejezte be annak a ténynek a bizonyítását, hogy a Suzuki csoportok kivételével minden végtelen sorozata egyszerű csoportoknak expanderré tehető. Ezt az eredményt Breuillard, Green és Tao [B,G,T1] terjesztette ki a Suzuki csoportokra is. Ezek az eredmények is motiválhatták Lubotzky következő kérdését. Igaz-e, hogy korlátos rangú Chevalley csoportok expander családot alkotnak egy közös korláttal. Ezek az eredmények mutatják, miért fontos Lubotzky, a bevezetőben bemutatott kérdése, ami végtelenhez tartó rangú Lie-típusú csoportok Cayley gráfjairól szól.

Luz (see [Lub1, p.31]) speciális lineáris csoportokról belátta, hogy van olyan végtelen sorozata a Cayley gráfjaiknak, amik nem alkotnak expander családot. Továbbá S_n-nek és A_n-nek könnyű olyan generátorrendszerét megadni, lásd [Lub1, Proposition 6.1.8], ami által indukált összefüggő Cayley gráf átmérője $\Omega(n^2)$. Ilyen gráfok végtelen sorozata persze nem alkot expander családot.

Az értekezésben bebizonyítjuk, hogy Lubotzky sejtése igaz.

Tétel 8 ([Som2]). *(a) Legyen G egy l rangú Chevalley csoport, ami a következő négy típusú csoportok egyike: A_l, B_l, C_l vagy D_l. Minden $l \geq 5$ természetes számra és minden véges $GF(q)$ testre létezik olyan T generátorrendszere G-nek, aminek elemszáma legfeljebb 10 és olyan S részhalmaza $Cay(G,T)$ gráf csúcsainak, amire $|S| \leq \frac{|G|}{2}$ és $\frac{|\partial(S)|}{|S|} \leq \frac{6}{l-3}$.*

(b) Legyen G egy csavat Lir típusú egyszerű csoport, am következő típusúak közül: ${}^2A_{2n-1}$, ${}^2A_{2n}$ vagy ${}^2D_n$. Ekkor minden $n \geq 5$-re és minden véges $GF(q)$ testre létezik olyan T' generátorrendszere G-nek, amire $|T'| \leq 8$, továbbá létezik olyan $S' \subset V(Cay(G,T'))$, amire $|S'| \leq \frac{|G|}{2}$ és$\frac{|\partial(S')|}{|S'|} \leq \frac{6}{n-2}$.

Ez az eredmény ráadásul nem csak Lubotzky sejtését igazolja, hanem explicit példát szolgáltat a keresett tulajdonságú gráfsorozatokra, méghozzá úgy, hogy a sorozatok tagjainak izoperimetrikus számára is explicit felső becslést kapunk. A bizonyítás esetről esetre halad végig a megfelelő típusú egyszerű csoportokon. Minden q prímhatványra 7 végtelen sorozatát $A_l(q), B_l(q), C_l(q)$, $D_l(q), {}^2A_{2n-1}(q^2), {}^2A_{2n}(q^2), {}^2D_n(q^2)$ vizsgáljuk Lie típusú egyszerű csoportoknak felhasználva a véges egyszerű csoportok Carter könyvében [Car] megadott leírását.

Végül $PSL(n, q)$-ra mátrixok segítségével is bemutatjuk a konstrukciót.

IRODALOMJEGYZÉK

[Ádá] A. Ádám, Research Problem 2-10, J. Combin. Theory, **2** (1967), 393.

[Bab1] L. Babai, Isomorphism problem for a class of point-symmetric structures, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **29** (1977), 329-336.

[B,F1] L. Babai, P. Frankl, Isomorphisms of Cayley graphs I, Colloqzeria Mathematica Societatis János Bolyai, **18** Combin. Keszthely, 1976, North-Holland, Amsterdam (1978), 35-52.

[B,G,G,T] E. Breuillard, B. Green, R. Guralnick, T. Tao, Expansion in finite simple groups of Lie type, arxiv: 1309.1975.

[B,G,T1] E. Breuillard, B. Green, T. Tao, Suzuki groups as expanders, Groups Geom. Dyn. **5** (2011), 281-299.

[Car] R. W. Carter, Simple groups of Lie type, John Wiley & Sons, New York, Reprint of the 1972 original; A Wiley-Interscience Publication (1989).

[C,L] M. Conder, C. H. Li, On isomorphism of Cayley graphs, Eur. J. Combin. **19** (1998), 911-919.

[D,S2] E. Dobson, P. Spiga, CI-groups with respect to ternary relational structures: new examples,

[H,M] M. Hirasaka, M. Muzychuk, An elementary abelian group of rank 4 is a CI-group, J. Combin. Theory, Ser. A **94**(2) (2001), 339-362.

[K,L,N] M. Kassabov, A. Lubotzky, N. Nikolov, Finite Simple Groups as Expanders, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **103** no. 16 (2006), 6116-6119.

[K,M] I. Kovács, M. Muzychuk, The group $\mathbb{Z}_{p^2} \times \mathbb{Z}_q$ is a CI-group, Comm. Alg. **37** (2009), 3500-3515.

[L,L,P] C. H. Li, Z. P. Lu, P. P. Pálfy, Further restrictions on the structure of finite CI-groups, J. Algebr. Combin. **26** (2007), 161-181.

[Lub1] A. Lubotzky, Discrete groups, expanding graphs and invariant measures, with an appendix by J. D. Rogawski, Reprint of the 1994 edition. Modern Birkhauser Classic. Birkhäuser Verlag, Basel, (2010).

[Lub2] A. Lubotzky, Expander Graphs in Pure and Applied Mathematics, Bull.

Amer. Math. Soc. **49** (2012), 113-162.

[Mar] G. A. Margulis, Explicit constructions of expanders. (Russian) Problemy Peredači Informacii **9** (1973), no. 4, 71-80. English translation: Problems of Information Transmission **9** no. 4, (1973), 325-332 .

[Mor3] J. Morris, Elementary proof that $\mathbb{Z}_p^4$ is a DCI-group, arXiv:1403.4557.

[Muz3] M. Muzychuk, An elementary abelian group of large rank is not a CI-group, Discrete Math. **264**(1-3) (2003), 167-185.

[Now] L. A. Nowitz, A non-Cayley-invariant Cayley graph of the elementary abelian group of order 64, Discrete Math. **110** (1992), 223-228.

[Pin] M. S. Pinsker, On the complexity of a concentrator, 7th International Teletraffic Conference, Stockholm, pages (1973), 318/1-318/4.

[Som1] G. Somlai, Elementary abelian p.groups of rank $2p+3$ are not CI-groups, J. Algebr. Combin. **34** (2011), 323-335.

[Som2] G. Somlai, Non-expander Cayley graphs of simple groups, Communications in Algebra, DOI:10.1080/00927872.2013.865041, (accepted paper).

[Spi1] P. Spiga, Elementary abelian p-groups of rank greater than or equal to 4p-2 are not CI-groups, J. Algebr. Combin. **26** (2007), 343-355.